Université Ibn Zohr

Faculté Polydisciplinaire

Ouarzazate, Maroc

جامعة ابن زهر

الكلية متعددة التخصصات

ورزازات، المغرب

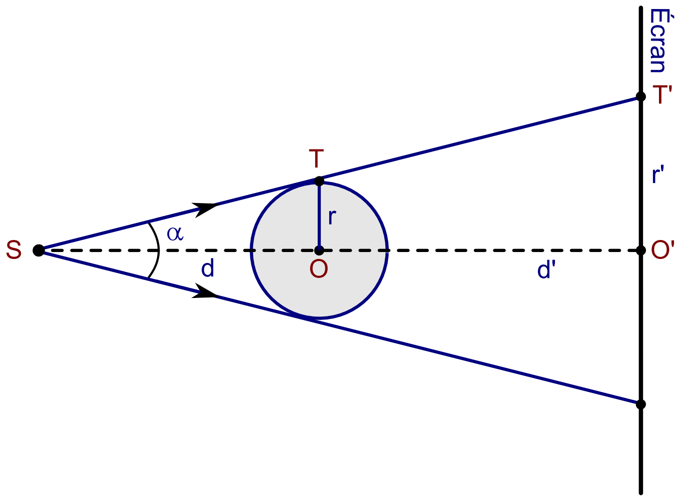
Correction des
Travaux Dirigés d'Optique Géométrique *

Prof. : H. Chaib

Filière : TCA, **Semestre** : 1, **Année** : 2008/2009, **Série** : 01

Exercice 1

1. D'après la figure, les triangles SOT et $SO'T'$ sont homothétiques et par conséquent :



$$\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'} \tag{1}$$

soit :

$$r' = \frac{rd'}{d} \tag{2}$$

A.N. : $r' = 5$ cm.

2. En considérant le triangle SOT, on peut écrire :

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d} \tag{3}$$

soit :

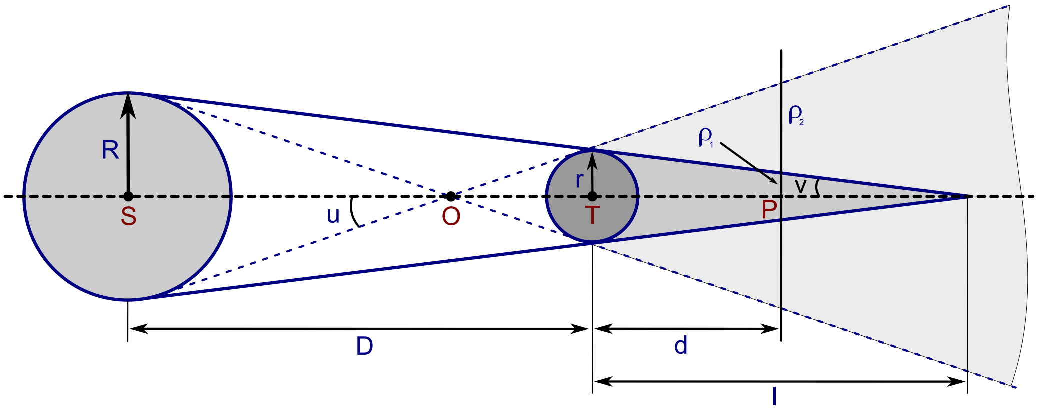
$$\alpha = 2\arctan\frac{r}{d} \tag{4}$$

A.N. : $\alpha = 0,012$ rd $= 1,146°$.

*. Les cours, les travaux dirigés avec correction, les épreuves avec correction et les travaux pratiques sont disponibles en ligne sur le site Web : http://hchaib.chez.com/teaching/

Exercice 2

1. D'après la figure, on a :



$$\tan v = \frac{r}{l} = \frac{R}{D+l} \tag{5}$$

soit :

$$r(D+l) = Rl \tag{6}$$

d'où :

$$l = \frac{rD}{R-r} \tag{7}$$

A.N. : $l = 1397686$ Km.

2. On a :

$$\tan v = \frac{\rho_1}{l-d} = \frac{r}{l} \tag{8}$$

soit :

$$\rho_1 = \frac{r}{l}(l-d) \tag{9}$$

A.N. : $\rho_1 = 4620$ Km.

On a aussi :

$$\tan u = \frac{r}{x} = \frac{\rho_2}{d+x} \tag{10}$$

soit :

$$\rho_2 = (d+x)\frac{r}{x} = r\left(1 + \frac{d}{x}\right) \tag{11}$$

avec $x = OT$. L'expression de x peut être extraite de l'égalité suivante :

$$\tan u = \frac{r}{x} = \frac{R}{D-x} \tag{12}$$

soit :

$$r(D-x) = Rx \tag{13}$$

ou encore

$$x = \frac{Dr}{R+r} \tag{14}$$

d'où :

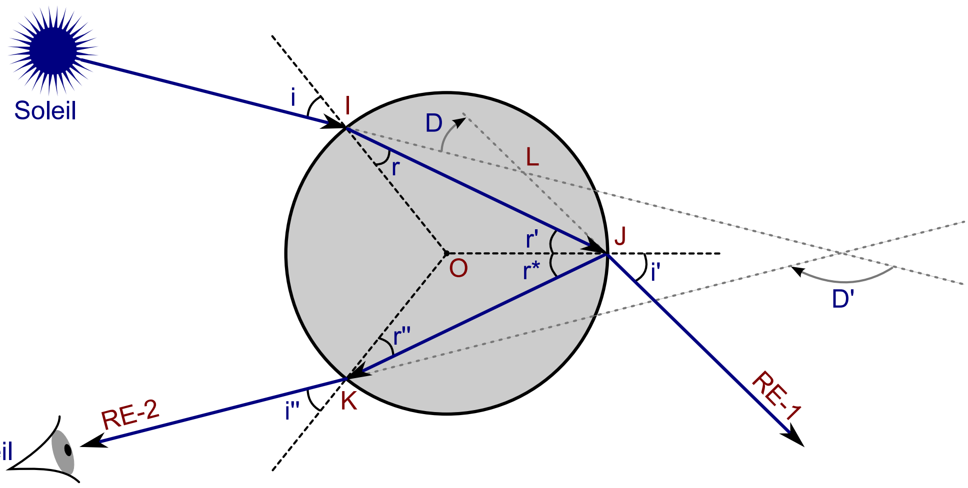
$$\rho_2 = r\left(1 + d\frac{R+r}{Dr}\right) \tag{15}$$

A.N. : $\rho_2 = 8153$ Km.

3. Si le centre de la lune passe par le point P, alors il sera totalement couvert par l'ombre de la terre parce que son rayon r' qui vaut 1700 Km est inférieur au rayon ρ_1 de l'ombre qui vaut 4620 Km (i.e. $r' < \rho_1$).

Exercice 3

1. On distingue deux classes de systèmes optiques :
   (a) **Système dioptrique** : C'est un système optique qui contient des milieux où la lumière ne subit que des réfractions ;
   (b) **Système catadioptrique** : C'est un système optique qui contient des milieux où la lumière subit un certain nombre de réfraction et au moins une réflexion.



   Alors, la goutte d'eau se comporte comme un système dioptrique pour le rayon $RE-1$ qui ne subit que des réfractions et comme un système catadioptrique pour le rayon $RE-2$ qui subit des réfractions et aussi une réflexion.

2. D'après les lois de Snell-Descartes au point I, il vient :

$$\sin i = n \sin r \qquad \text{ou encore} \qquad \sin r = \frac{\sin i}{n} \tag{16}$$

   or $0 \leq \sin i \leq 1$ et $n > 1$ alors :

$$0 \leq \frac{\sin i}{n} \leq \frac{1}{n} < 1 \tag{17}$$

   d'où :

$$0 \leq \sin r < 1 \tag{18}$$

   Ceci signifie qu'il existe toujours un angle $0° \leq \ r \leq 90°$ qui satisfait la condition $\sin r = \frac{\sin i}{n}$ pour n'importe quelle valeur de $0° \leq \ i \leq 90°$. Cependant pour $i = 90°$:

$$\sin r = \frac{1}{n} \qquad \text{soit} \qquad r = \arcsin \frac{1}{n} \tag{19}$$

   A.N. : $r = 48,75°$.

3. L'application de la loi de réfraction aux points I et J donne :

$$\sin i = n \sin r \qquad \text{et} \qquad \sin i' = n \sin r' \tag{20}$$

   Or $r = r'$ (car r et r' sont les angles du triangle isocèle IOJ), alors $i = i'$.

4. La somme des angles du triangle ILJ est égale à 180°, c'est à dire :
$$(i-r)+(i'-r')+(180^\circ-D)=180^\circ \tag{21}$$
soit :
$$D=2(i-r) \tag{22}$$

5. En différentiant $\sin i = n\sin r$, on obtient :
$$\cos i \ di = n\cos r \ dr \tag{23}$$
soit :
$$\frac{dr}{di}=\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos i}{\cos r} \tag{24}$$
De même, en dérivant D par rapport à i, on obtient :
$$\frac{dD}{di}=2\left(1-\frac{dr}{di}\right) \tag{25}$$
soit :
$$\frac{dD}{di}=2\left(1-\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos i}{\cos r}\right) \tag{26}$$
Cette quantité s'annule si :
$$1=\frac{1}{n}\cdot\frac{\cos i}{\cos r} \tag{27}$$
c'est à dire si :
$$\cos i = n\cos r \tag{28}$$
Or $\sin i = n\sin r$, alors dans ce cas on peut écrire :
$$\cos^2 i = n^2\cos^2 r \qquad \text{et} \qquad \sin^2 i = n^2\sin^2 r \tag{29}$$
ou encore :
$$\left(\cos^2 i+\sin^2 i\right)=n^2\left(\cos^2 r+\sin^2 r\right) \tag{30}$$
soit :
$$1=n^2 \tag{31}$$
ce qui est impossible car $n=1,33$.
Donc la quantité $\frac{dD}{di}$ ne s'annule jamais et par conséquent la déviation D ne peut pas avoir d'extremum quand on varie i entre 0° et 90°.

6. La réflexion en J implique que $r'=r^*$. De plus, $r^*=r''$ car r^* et r'' sont les angles du triangle isocèles OJK. Il en résulte que $r''=r'=r$.
Encore, la loi de réfraction en K implique :
$$n\sin r''=\sin i'' \tag{32}$$
En considérant cette égalité avec celle obtenue de la loi de réfraction en I (i.e. $n\sin r=\sin i$) et aussi $r''=r$, on déduit que $i''=i$.

7. Lors de sa pénétration dans la goutte en I, le rayon incident subit une déviation de $(i-r)$ et lors de sa réflexion en J, il subit une autre déviation de $(180^\circ-r)$ et en fin lors de son émergence de la goutte en K, il subit une troisième déviation de $(i-r)$. Au total ce rayon incident en I et émergent en K (i.e. le rayon $RE-2$) subit une déviation $D'=2i-4r+180^\circ$. Soit :
$$D'=180^\circ+2i-4r \tag{33}$$

8. En dérivant D' par rapport à i, on obtient :

$$\frac{dD'}{di} = 2 - 4\,\frac{dr}{di} \tag{34}$$

or :

$$\frac{dr}{di} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} \tag{35}$$

alors :

$$\frac{dD'}{di} = 2 - \frac{4}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} \tag{36}$$

Le déviation D' passe par un extremum si :

$$\frac{dD'}{di} = 0 \tag{37}$$

c'est à dire si :

$$2 - \frac{4}{n} \cdot \frac{\cos i}{\cos r} = 0 \tag{38}$$

ou encore

$$n \cos r = 2 \cos i \tag{39}$$

En considérant cette relation et la relation $n \sin r = \sin i$, on peut écrire :

$$n^2 \cos^2 r = 4 \cos^2 i \qquad \text{et} \qquad n^2 \sin^2 r = \sin^2 i \tag{40}$$

La somme de ces deux équation membre à membre donne :

$$n^2 = 4 \cos^2 i + \sin^2 i \tag{41}$$

En remplaçant $\cos^2 i$ par $(1 - \sin^2 i)$, il vient :

$$n^2 = 4 - 3 \sin^2 i \tag{42}$$

soit :

$$\sin i = \pm \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \tag{43}$$

Le membre de droite de cette équation (en valeur absolue) est compris entre 0 et 1 (car $1 \leq n \leq 2$) ce que signifie qu'il existe un angle $0° \leq i \leq 90°$ (i.e. $0 \leq \sin i \leq 1$) pour lequel la déviation D' passe par extremum D'_{m}. Cet angle est donné par :

$$\sin i = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \tag{44}$$

soit :

$$i = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \tag{45}$$

9. D'après la question précédente, l'angle i_{m} pour lequel la déviation D' passe par un extremum est donné par :

$$i_{\mathrm{m}} = \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \tag{46}$$

L'angle r_{m} correspondant est donné par :

$$r_{\mathrm{m}} = \arcsin \frac{\sin i_{\mathrm{m}}}{n} \tag{47}$$

La déviation extrémale D'_{m} s'écrit :

$$D'_{\mathrm{m}} = 180° + 2i_{\mathrm{m}} - 4r_{\mathrm{m}} \tag{48}$$

A.N. : $i_{\mathrm{m}} = 59,58°$, $r_{\mathrm{m}} = 40,42°$ et $D'_{\mathrm{m}} = 137,48°$.

10. Tous les rayons de type $RE-2$ dont l'angle d'incidence i est très proche de la valeur i_{m} subiront une déviation quasiment égale à D'_{m}. Donc il y aura accumulation de la lumière dans cette direction. Cependant, il n'y aura pas d'accumulation de lumière pour les rayons de type $RE-1$ qui traversent la goutte sans subir de réflexion parce que leur déviation D ne présente pas d'extremum.
11. Les couleurs de l'arc-en-ciel varient entre le rouge ($n = 1,329$) et le bleu ($n = 1,343$) ce qui correspond à une variation $dn = 0,014$.
Or :
$$\frac{dD'_{\mathrm{m}}}{dn} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} \tag{49}$$
alors la largeur angulaire dD'_{m} de l'arc-en-ciel s'écrit :
$$dD'_{\mathrm{m}} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}}\, dn \tag{50}$$
A.N. : $dD'_{\mathrm{m}} = 0,036$ rd $= 2,05°$.